

INLEIDING

Gesinterde warmtewisselaars zijn een laatste en cruciale stap voor het bereiken van lage temperaturen met een mengkoelmachine. De doel van gesinterde warmtewisselaars is om het ^3He dat de mengkamer inkomt zo goed mogelijk voor te koelen. Op die manier brengt het ^3He zo min mogelijk warmte de mengkamer mee binnen, waardoor in de mengkamer lagere temperaturen bereikt kunnen worden. De ^3He - ^4He stroom richting still wordt gebruikt om de ^3He stroom af te koelen. Viscositeit en thermische geleiding verstoren de warmteafdracht. Eigenschappen als contactoppervlak, stroomsnelheid en doorsnedes van de leidingen zijn parameters die geoptimaliseerd dienen te worden om het ^3He zo ver mogelijk af te koelen.

Hoofddoel van deze IEN-stage is geweest om een numerieke methode te ontwikkelen die het systeem van warmtewisselaars beschrijft en kan optimaliseren. Daarnaast was het de bedoeling ervaring te krijgen in het werk in de Quantum-vloeistoffen vakgroep, in het bijzonder met betrekking tot het project MiniGRAIL.

INHOUDSOPGAVE

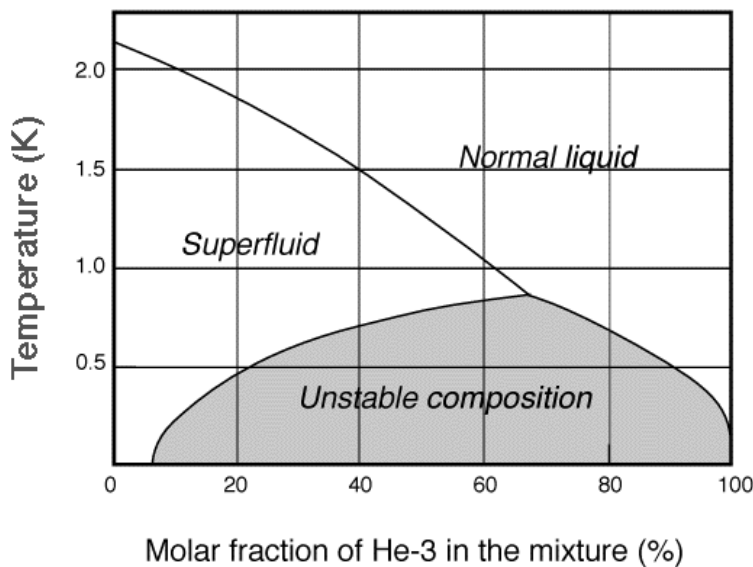
1. Principe van een mengkoelmachine	3
1.1 Fasescheiding	3
1.2 Koelvermogen	4
2. Theorie van de warmtewisselaars	6
2.1 Beperkingen aan warmteoverdracht	6
2.1.1 Kapitza weerstand	6
2.1.2 Viscositeit	7
2.1.3 Warmtegeleiding	8
2.2 Warmteoverdracht	8
2.3 Gekoppelde differentiaalvergelijkingen	9
3. Principe van optimalisatie van de warmteoverdracht	10
3.1 Sinter	10
3.2 Optimalisatie doorsnede leidingen	10
3.3 Discontinue warmtewisselaars	11
4. Benaderingsmethoden	12
4.1 Methode van Frossati	12
4.1.1 Theoretische afleiding	12
4.1.2 Resultaten	14
4.2 Methode van lineaire en exponentiële temperatuursverdeling	17
4.3 Methode van relaxatie tot thermisch evenwicht	24
5. Benaderingen, nauwkeurigheid en suggesties	27
Referenties	29
Bijlage	30
Programma bij paragraaf 4.2	30
Programma bij paragraaf 4.3	33

1. PRINCIPE VAN EEN MENGKOELMACHINE

1.1 FASESCHEIDING

De werking van een mengkoelmachine berust op (quantummechanische) karakter van ^3He en ^4He bij lage temperaturen. Beneden de 2,17 K vormt ^4He een Bose-Einstein condensaat. ^4He is een boson, waardoor bij deze lage temperatuur alle atomen in dezelfde toestand gaan. Het wordt superfluïde.

Boven 860 mK is ^3He in iedere verhouding op te lossen in ^4He . Aan weerszijden van de zogenaamde λ -lijn heeft het mengsel superfluïde dan wel normale eigenschappen. Bij 860 mK treedt een fasesplitsing op. Beneden deze temperatuur is niet iedere mate van oplossing meer geoorloofd. Het is deze fasesplitsing die uiteindelijk het fundament vormt waar de werking van de mengkoelmachine op is gebaseerd.



Figuur 1.1: fasesdiagram van vloeibare ^3He - ^4He mengsels bij verzadigde dampdruk

In de mengkamer komen beide fasen voor. Aangezien ^4He zwaarder is dan ^3He , drijft een fase met een hoge concentratie ^3He op een vloeistof die arm aan ^3He is. Bij temperaturen in de orde van 20 mK nadert het percentage ^3He in de geconcentreerde fase 100 % en in de gemengde fase 6,5 %. In de geconcentreerde fase stapelen de ^3He fermionen zich op in oplopende energietoestanden, in de gemengde fase gebeurt hetzelfde. Het is energetisch voordeliger voor het ^3He om in de gemengde fase plaats te nemen. Hierdoor zal de gemengde fase de maximale hoeveelheid van 6,5 % aan ^3He bevatten.

Wanneer nu uit de gemengde fase ^3He wordt weggepompt, zal vanuit de geconcentreerde fase ^3He naar de gemengde fase overgaan. Bij deze overgang vindt de gewenste afkoeling plaats.

Het ^3He wordt uit de gemengde fase in de mengkamer weggevoerd door aan het

gas in de still (kort voor distillation pot) te pompen. Via een kolom bereikt het mengsel de still. Als gevolg van het plaatsnemen van alle atomen in de laagst energetische toestand, heeft superfluïde ^4He een entropie gelijk aan nul. Hierdoor gedraagt ^3He zich in het superfluïde ^4He als een gas. De still wordt gestookt tot 600-700 mK om meer gas boven de vloeistof te bewerkstelligen. Zoals vermeld bedraagt in de verdunde fase in de mengkamer het percentage ^3He in ^4He 6,5%. Opwaarts in de kolom richting still neemt dit percentage af vanwege de hogere temperatuur aldaar. De hogere temperatuur in de still impliceert deeltjes met een hogere kinetische energie. Dit leidt ertoe dat het percentage ^3He zal afnemen ten op zichte van het percentage in de mengkamer.

Aan het gas boven het vloeistofoppervlak in de still wordt gepompt. Ondanks de lage concentratie ^3He in de vloeistof, bestaat het gas dat wordt weggepompt voor 99% uit ^3He . Dit valt te wijten aan de de lagere dampspanning van het lichte ^3He ten opzichte van het zwaardere ^4He . Het weggepompte gas vormt dus een geconcentreerde fase. Het wordt, nadat het tot kamertemperatuur is gekomen, teruggebracht in het systeem. Via verschillende stappen wordt het weer afgekoeld en gecondenseerd. Nadat deze geconcentreerde stroom uiteindelijk door de still is geleid, bereikt het de continue warmtewisselaar.

1.2 KOELVERMOGEN

Het koelvermogen van de mengkamer kan worden berekend met behulp van een enthalpie balans. Het totale koelvermogen per tijdseenheid Q van de mengkamer wordt gegeven door:

$$Q = n_3 T_{MC} [S_D(T_{MC}) - S_C(T_{MC})] \quad (1.1)$$

waar n_3 de molaire stroom in $[\text{mol}\cdot\text{s}^{-1}]$, T_{MC} de temperatuur van de mengkamer, $S_D(T_{MC})$ en $S_C(T_{MC})$ de entropie van respectievelijk de gemengde en de geconcentreerde fase.

Uit de enthalpie $H = U + PV$ (U is energie, P is druk, V is volume) en de wetenschap dat in thermodynamisch evenwicht de chemische potentiaal μ voor zowel ^3He als ^4He in beide fases gelijk is, volgt dat

$$H_D - H_C = T_{MC} (S_D - S_C) \quad (1.2)$$

zodat vergelijking (1.1) ook te schrijven is als:

$$Q = n_3 [H_D(T_{MC}) - H_C(T_{MC})] \quad (1.3)$$

Stel nu voor dat ^3He de mengkamer binnen komt met een temperatuur $T_C \geq T_{MC}$. Dit correspondeert met een warmte-invoer:

$$Q_C = n_3 [H_C(T_C) - H_C(T_{MC})] \quad (1.4)$$

Dit leidt tot een effectief koelvermogen $Q_{ext} = Q - Q_C$ dat gebruikt kan worden om een experiment te koelen:

$$Q_{ext} = n_3 [H_D(T_{MC}) - H_C(T_C)] \quad (1.5)$$

Het blijkt dat beneden 50 mK de warmtecapaciteit $C = \frac{dQ}{dT}$ lineair gaat met de temperatuur. Voor ^3He geldt $C_C = 25T$ [$\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$], voor een mengsel van 6,48 % ^3He in ^4He blijkt $C_D = 107T$ [$\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]. Omdat bij constante druk $dH = TdS + VdP = TdS$ en $TdS = C_p dT$ vinden we:

$$H_C = \int_0^T C_C dT \quad (1.6)$$

De enthalpie is tot op een constante bepaald zodat de stelling $H(0) = 0$ gerechtvaardigd is. Uit vergelijking (1.6) volgt voor H_C en met behulp van vergelijking (1.2) voor H_D :

$$\begin{aligned} H_C(T) &= 12,5T^2 & [\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-2}], \\ H_D(T) &= 94,5T^2 & [\text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-2}]. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Het effectieve koelvermogen om een experiment te koelen wordt dus gegeven door

$$\frac{Q_{ext}}{n} = 94,5T_{MC}^2 - 12,5T_C^2 \quad (1.8)$$

en het totale koelvermogen door

$$\frac{Q}{n} = 94,5T_{MC}^2 - 12,5T_{MC}^2 \quad (1.9)$$

2. THEORIE VAN DE WARMTEWISSELAARS

In de continue warmtewisselaar wordt de geconcentreerde ^3He stroom in thermisch contact gesteld met de verdunde stroom tussen mengkamer en still. Zo staat de geconcentreerde stroom warmte af aan de warmere gemengde stroom. Na de continue warmtewisselaar komt de geconcentreerde fase onder de 50 mK-plaat in de gesinterde warmtewisselaars.

Voor een optimale werking van een mengkoelmachine, dat wil zeggen het bereiken van een zo laag mogelijk temperatuur, zijn goede warmtewisselaars van groot belang. De temperatuur die uiteindelijk in de mengkamer wordt bereikt, is namelijk afhankelijk van de temperatuur van de geconcentreerde fase die binnenkomt. Hoe beter de geconcentreerde fase wordt afgekoeld in de warmtewisselaars, hoe lager de temperatuur van mengkamer zal zijn.

Echter, een grote warmteoverdracht tussen de geconcentreerde en de gemengde fase tussen mengkamer en 50 mK-plaat is bij lage temperaturen niet evident.

2.1 BEPERKINGEN AAN WARMTEOVERDRACHT

Bij het ontwerpen van warmtewisselaars bij temperaturen beneden circa 150 mK, moet men rekening houden met drie effecten die de warmteoverdracht tussen de twee stromen beperken.

2.1.1 KAPITZA WEERSTAND

De warmteoverdracht binnen een warmtewisselaar wordt beperkt door een grote thermische weerstand aan de wand (thermal boundary resistance). Dit effect, dat bekend staat als de Kapitza weerstand, wordt verklaard als een fononenmiskoppeling aan de wand. Om warmte vanuit helium aan de wand af te staan, moet deze energie eerst aan fononen worden doorgegeven. Het gedrag van de fononen aan de wand kan beschreven worden met de wet van Snellius.

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{v_1}{v_2} \quad (2.1)$$

Hierbij zijn ϑ_1 en ϑ_2 de hoeken ten opzichte van de normaal van het inkomende respectievelijk uittredende fonon en v_1 en v_2 de geluidssnelheden in de bijbehorende media.

Aangezien het verschil in geluidssnelheid in helium en metalen van de orde 20 is, zal het grootste gedeelte van de fononen aan de wand gereflecteerd worden. Slechts fononen die maximaal met een hoek van 3° ten opzichte van de normaal aan de wand komen, dringen door in het metaal. Dit is de oorzaak van de grote weerstand aan de wand en een beperking voor een grote warmteoverdracht.

De grootte van de Kapitza weerstand is afhankelijk van het temperatuurdomein, evenals van de eigenschappen van het materiaal in kwestie waar het helium langs stroomt. In het algemeen is voor $20 \text{ mK} \leq T \leq 100 \text{ mK}$, het temperatuursdomein waarin gesinterde warmtewisselaars functioneren, de Kapitza weerstand evenredig met T^{-3} , $R \propto T^{-3}$. Specifiek wordt de Kapitza weerstand R_k gegeven door:

$$R_k = \frac{\alpha_k}{\sigma T^3}, \quad (2.2)$$

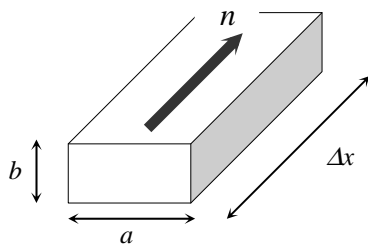
waarbij σ het contact oppervlak en α_k een constante. Exacte waarden voor de constante α_k kunnen gevonden worden in [1].

2.1.2 VISCOSITEIT

Bij lage temperaturen dient men bij stromingsprocessen rekening te houden met de temperatuursafhankelijkheid van viscositeit. Een warmteverandering ΔQ_{visc} ten gevolge van deze viscositeit wordt gegeven door:

$$\Delta Q_{visc} = V \Delta P \quad (2.3)$$

met V de volume stroom welke gelijk is aan nV_m , de molaire stroom ($\text{mol} \cdot \text{s}^{-1}$) maal het molaire volume ($\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$). De druk verandering ΔP wordt gegeven door $\Delta P = \Delta Z \eta V$. ΔZ , de geometrische impedantie, is een maat voor de weerstand die de vloeistof ondervindt door wrijving aan de wand die gerelateerd is aan de vorm van de buis. Voor een leiding met rechthoekige doorsnede kan deze impedantie over een lengte Δx geschreven worden als $\Delta Z = \frac{12}{ab^3} \Delta x$, waarbij a en b gedefinieerd zoals beschreven in figuur 2.1.



Figuur 2.1: Schematische weergave van de leiding

Samengevat kan men voor viscoze opwarming over een lengte Δx schrijven:

$$\Delta Q_{visc} = \eta V_m^2 n^2 \Delta Z \quad (2.4)$$

Voor de viscositeit geldt $\eta = \eta(T) = \frac{\eta_0}{T^2}$ [Pa·s·K²].

2.1.3 THERMISCHE GELEIDING

Behalve viscositeit, speelt ook thermische geleiding een beperkende rol in het bereiken van lage temperaturen in een warmtewisselaar. Bij een temperatuurverschil in een buis zal een warmtestroom plaatsvinden parallel aan de stroomrichting, van warm naar koud. De grootte van deze warmtestroom is afhankelijk van het temperatuurverschil. De warmtegeleiding per tijdseenheid wordt gekarakteriseerd door:

$$Q_{cond} = -kA \frac{dT}{dx} \quad (2.5)$$

waarbij A de doorsnede van de leiding en $k = k(T) = \frac{3,3 \cdot 10^{-4}}{T}$ [WK⁻¹m⁻¹] de thermische geleiding.

2.2 WARMTEOVERDRACHT

Voor een warmtewisselaar die gekarakteriseerd wordt door een Kapitza weerstand die evenredig is met T^{-3} , geldt voor de warmteoverdracht per tijdseenheid Q :

$$Q = \lambda \sigma (T_C^4 - T_D^4) \quad (2.6)$$

waarbij $\lambda = \frac{1}{4\alpha_k}$ een constante in $Wm^{-2}K^{-4}$ en σ het contactoppervlak. Dit is analoog aan

de Stephan-Boltzmann stralingswet $\frac{Q}{A} = \sigma T^4$. Merk echter op dat A de rol speelt van σ in (2.6) en de Stephan-Boltzmann constante σ de rol van λ in (2.6). T_C representeert de temperatuur van de geconcentreerde (concentrated) fase, T_D de temperatuur van de gemengde (diluted) fase.

2.3 GEKOPPELDE DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

Het gedrag van beide fases over een lengte dx kan worden omschreven door:

$$\frac{d}{dx}(Q_{cond} + Q_{visc} + Q_{exch}) = \frac{d}{dx}(nH(T)) \quad (2.7)$$

met zoals eerder vermeld $dH = C_p dT$. Dit leidt voor de volgende gekoppelde differentiaalvergelijkingen:

geconcentreerde fase:

$$A_c \frac{d}{dx} \left[k_c(T) \frac{dT_c}{dx} \right] + V_c^2 \frac{d}{dx} [\eta_c(T) Z_c] + \lambda \frac{d\sigma}{dx} (T_c^4 - T_D^4) = nC_c \frac{dT_c}{dx}$$

gemengde fase:

$$A_D \frac{d}{dx} \left[k_D(T) \frac{dT_D}{dx} \right] + V_D^2 \frac{d}{dx} [\eta_D(T) Z_D] + \lambda \frac{d\sigma}{dx} (T_c^4 - T_D^4) = nC_D \frac{dT_D}{dx} \quad (2.8)$$

Er bestaat voor deze set gekoppelde differentiaalvergelijkingen geen analytische oplossing. De probleemstelling is dus een numerieke benaderingsmethode te ontwikkelen die het gedrag beschrijft.

Bruikbare eigenschappen van ^3He en een $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mengsel zijn weergegeven in de tabel (2.1).

Tabel 2.1: Eigenschappen van geconcentreerd ^3He en een 6 % $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mengsel

	Geconcentreerd ^3He	6 % $^3\text{He} - ^4\text{He}$ mengsel	
Viscositeit η_0	$1,8 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$\text{Pa} \cdot \text{s}$
Themische geleiding k_0	$3,3 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$\text{W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$
Warmtecapaciteit C	25 T	107 T	$\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$
Molaire volume V_m	$36,38 \cdot 10^{-6}$	$430 \cdot 10^{-6}$	$\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$

3. PRINCIPE VAN OPTIMALISATIE VAN DE WARMTEOVERDRACHT

3.1 SINTER

Aangezien de warmteoverdracht evenredig is met het contactoppervlak σ , is het zaak de warmtewisselaars zo te ontwerpen dat deze waarde groot is. Uitgaande van cilindrische warmtewisselaars met diameter $d \sim 0,5 \text{ cm}$ en een lengte $l \sim 50 \text{ cm}$ ligt het geometrische contactoppervlak in de orde van 10^{-2} m^2 . Door de scheidingswand tussen de geconcentreerde en de gemengde fase te bedekken met sinter, kan het effectieve contactoppervlak aanzienlijk vergroot worden. Sinter is een metaalpoeder dat onder verhitting aan de wand wordt gehecht. De poreuze structuur van de sinterlaag geeft het vergrote contactoppervlak. Bij het aanbrengen van de sinterlaag, moet een compromis gemaakt worden tussen een groot oppervlak, wat verkregen wordt door het poeder bij lage temperatuur te hechten, en een goede thermische geleiding en binding tussen de deeltjes aan de wand. Dit laatste wordt juist verkregen bij een hoge temperatuur. Een goed resultaat krijgt men wanneer tijdens het verwarmen het sinter op de wand wordt geperst.

De korrels waar het sinter uit bestaat hebben typisch een grootte in de orde van $0,1 - 10 \mu\text{m}$. Zilver is een materiaal dat veel gebruikt wordt als sinter. Dit materiaal heeft het voordeel dat het bij lage temperaturen een grote thermische geleiding heeft. Hierdoor wordt de warmteafgifte van de geconcentreerde stroom aan gemengde stroom vergroot. Wanneer de poederdeeltjes klein gemaakt zijn, ontstaan er kleinere stroomkanaaltjes in het sinter. Dit brengt een groot contactoppervlak teweeg. Tegelijkertijd dient er rekening gehouden te worden met de weerstand die in kleine kanaaltjes groter wordt.

Veel gebruikte zilversinters zijn zogenaamd Frans en Japans poeder. Frans zilverpoeder geeft een contactoppervlak van circa $0,1 \text{ m}^2 \text{ g}^{-1}$, Japans poeder een oppervlak van $2 \text{ m}^2 \text{ g}^{-1}$. Meer informatie over sinter kan gevonden worden in [1], hoofdstuk 13.6.

3.2 OPTIMALISATIE DOORSNEDE LEIDINGEN

Opwarming ten gevolge van viscositeit neemt volgens vergelijking (2.4) toe naar mate de doorsnede van een leiding afneemt. Daarentegen neemt de opwarming door thermische geleiding juist toe bij een grotere doorsnede (vergelijking (2.5)). De doorsnede dient geoptimaliseerd te worden zodat het gezamenlijke effect van viscositeit en geleiding minimaal is.

Er zijn echter andere factoren om een kleine doorsnede te kiezen. Een kleine doorsnede is gewenst om de vloeistof snel in thermisch evenwicht te brengen ([1] p. 124), evenals om een osmotische druk te ontwikkelen tussen de mengkamer en de still ([1] p. 130). Een kleine doorsnede is eveneens te prefereren om te besparen op de hoeveelheid te gebruiken ^3He , wat financieel aantrekkelijk is. Ik heb mij echter beperkt tot een afweging van viscositeit en thermische geleiding.

3.3 DISCONTINUE WARMTEWISSELAARS

Omdat viscositeit en thermische geleiding sterk afhankelijk zijn van het temperatuursregime, zullen de optimale afmetingen van een warmtewisselaar ook die afhankelijkheid bezitten. Om die reden worden gesinterde warmtewisselaars opgedeeld in stappen, waarbij de eigenschappen van iedere stap afzonderlijk is afgestemd op het actuele temperatuursgebied. In het algemeen geldt dat bij hogere temperaturen de doorsnede van een warmtewisselaar groter is dan bij lagere temperaturen.

4. BENADERINGSMETHODEN

In dit hoofdstuk bespreek ik de drie methoden die ik uitgewerkt heb om het probleem op te lossen. Allereerst heb ik de benadering zoals gedaan door Giorgio Frossati onder de loep genomen. Vervolgens heb ik een benadering ontworpen waarbij één van beide stromen een willekeurige temperatuursverdeling wordt opgelegd en de invloed daarvan op de andere stroom wordt berekend. Ten slotte zal ik een methode bespreken waarbij met alleen de wetenschap van de inkomende temperatuur van de geconcentreerde fase thermisch evenwicht wordt bepaald. Daarbij gelden doorsnede en lengte van de leidingen, de stroomsnelheid en het warmtelek als parameters.

De ideeën, redenen om het probleem op de gedane manieren aan te pakken, evenals de werkwijze en de redenen waarom bepaalde oplossingsmethoden niet tot het gewenste resultaat hebben geleid, komen ter sprake.

Na eerst MATLAB 6.1 bestudeerd en de voor- en nadelen afgewogen te hebben ten opzichte van Borland C, heb ik besloten de laatstgenoemde te hanteren. Ondanks dat C een lagere taal is dan MATLAB en daardoor wellicht over minder kant en klare toepassingen beschikt, leek Borland C mij handiger, met name omdat ik geen ervaring heb met MATLAB en Borland C mij wel bekend is.

4.1 METHODE VAN FROSSATI

Het eerste en aanknopingspunt dat mij werd aangeleverd om het probleem van de warmtewisselaars aan te pakken betrof een benadering gedaan door Giorgio Frossati. Om me de materie eigen te maken, heb ik eerst deze methode bestudeerd en in C-code geschreven. Daarbij heb ik een aantal finesses die Frossati verwaarloosd, meegenomen in de berekening.

4.1.1 THEORETISCHE AFLEIDING

Een goed werkende benadering is gemaakt door Giorgio Frossati. Hij gaat uit van zogenaamde perfecte warmtewisselaars. Dat wil zeggen dat opwarming door viscositeit en thermische geleiding verwaarloosbaar is ten opzichte van de warmteoverdracht tussen de twee fasen. Hiervan uitgaande wordt vergelijking (2.8) gereduceerd tot:

$$\lambda \frac{d\sigma}{dx} (T_C^4 - T_D^4) = nC_C \frac{dT_C}{dx} \quad (4.1)$$

In een perfecte warmtewisselaar wordt alle warmte die de geconcentreerde fase afgeeft opgenomen door de gemengde fase, zodat

$$dH_C = dH_D \quad (4.2)$$

met $dH_C = C_C dT_C = aT_C dT_C$ en $dH_D = C_D dT_D = bT_D dT_D$. Na integratie volgt dat

$$T_D = \sqrt{\frac{a}{b}} T_C \quad (4.3)$$

waarmee vergelijking (4.1) uit te drukken is in enkel termen van T_C :

$$\lambda \frac{d\sigma}{dx} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right] T_C^4 = na T_C \frac{dT_C}{dx} \quad (4.4)$$

Aangezien $a = 25 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ en $b = 107 \text{ Jmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ wordt de term tussen haken benaderd als 1. Vervolgens voeren we de constante $P \equiv \frac{d\sigma}{dx}$ in, de effectieve omtrek van de buis.

We vinden

$$\frac{\lambda P}{an} dx = \frac{dT_C}{T_C^3} \quad (4.5)$$

Na integratie over de lengte l van de warmtewisselaar en de verwaarlozing van $T_C^{-2}(l)$ ten opzichte van $T_C^{-2}(0)$, waarbij $x = l$ de ingang van de buis representeert en $x = 0$ de uitgang, volgt

$$\frac{1}{T_C^2(0)} = 2 \frac{\lambda P}{an} l \quad (4.6)$$

Met $\sigma = Pl$ en $\lambda = \frac{1}{4\alpha_k}$ komen we op

$$T_C^2(0) = 50\alpha_k \frac{n}{\sigma} \quad (4.7)$$

zodat de temperatuur van de mengkamer met behulp van (1.8) uiteindelijk geschreven kan worden als

$$T_{MC}^2 = 6,61\alpha_k \frac{n}{\sigma} + 0,01 \frac{Q_{ext}}{n} \quad (4.8)$$

Men ziet dat de temperatuur van de mengkamer zoals verwacht afneemt bij een groot contactoppervlak σ en bij een klein warmtelek Q_{ext} . Voor de stroomsnelheid n dient een optimum gevonden te worden.

De volgende stap is de viscositeit en thermische geleiding alsnog mee te nemen. De diameter van de buis wordt zo bepaald dat de gezamenlijke opwarming door beide

effecten minimaal is. In brengende dat $\Delta Q_{visc} = \eta V_m^2 n^2 \Delta Z$ met voor een vierkante buis $\Delta Z = \frac{12}{d^4} \Delta x$ en $\Delta Q_{cond} = -kA \frac{\Delta T}{\Delta x}$ met $A = d^2$, hebben we een gezamenlijke opwarming van de vorm

$$Q = Ad^{-4} + Bd^2 \quad (4.9)$$

welke een minimum heeft voor

$$d = d_{op} = \left(\frac{2A}{B} \right)^{1/6} \quad (4.10)$$

4.1.2 RESULTATEN

Bij deze methode worden drie benaderingen gedaan. Allereerst wordt de warmtewisselaar perfect verondersteld en worden viscositeit en warmtegeleiding als een soort storing op dat gedrag benaderd. Dit is het fundament waar de benadering op rust. Vervolgens zijn er twee benaderingen die bestaan uit het verwaarlozen van kleine termen. T_D wordt na formule (4.4) verwaarloosd ten opzichte van T_C , $T_C^{-2}(l)$ wordt na vergelijking (4.5) verwaarloosd ten opzichte van $T_C^{-2}(0)$. Wanneer deze termen wel meegenomen worden, krijgt vergelijking (4.7) de vorm

$$\begin{aligned} T_C^{-2}(0) &= \left[\frac{2\lambda\sigma}{a} \left(1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right) + T_C^{-2}(l) \right] \frac{1}{n} \\ &= \left[0,945 \frac{\sigma}{50\alpha_k} + T_C^{-2}(l) \right] \frac{1}{n} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Met behulp van het resultaat uit paragraaf 1.2

$$\frac{Q}{n} = 94,5T_{MC}^2 - 12,5T_C^2(0) \quad (4.12)$$

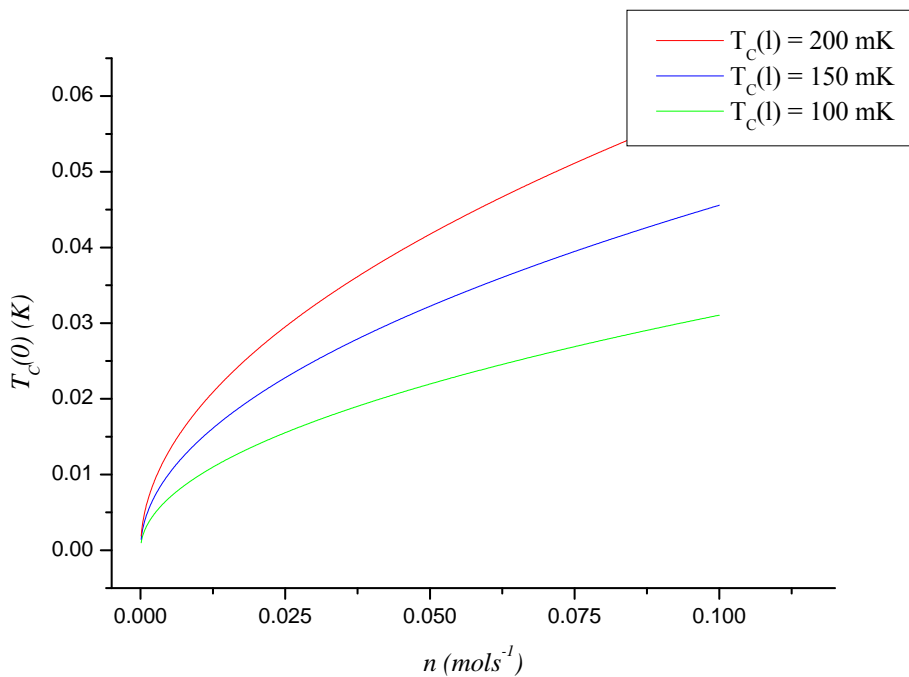
kan de temperatuur van de mengkamer bepaald worden. Het meenemen van deze twee termen maakt de vergelijkingen wat complexer. Het zal de uitkomsten echter niet drastisch veranderen, alleen de nauwkeurigheid zal verbeteren.

De om werking van deze methode te bekijken, vergelijk ik de uitkomsten met de laatste afkoeling van MiniGRAIL. Er zijn voor dat experiment drie gesinterde warmtewisselaars gemonteerd tussen de 50 mK-plaat en de mengkamer. Deze warmtewisselaars hadden sinterhoeveelheden en bijbehorende oppervlaktes zoals genoteerd in tabel (4.1).

Tabel 4.1: Hoeveelheid en type sinter van de drie warmtewisselaars met resulterende contactoppervlaktes

Nummer	Percentage %		Gewicht (g)		Oppervlakte (m^2)		
	Frans	Japans	dil	con	dil	con	gem
1	100	0	62	83	6,2	8,3	8,3
2	80	20	64	83	64	83	83
3	50	50	64	83	100	130	130

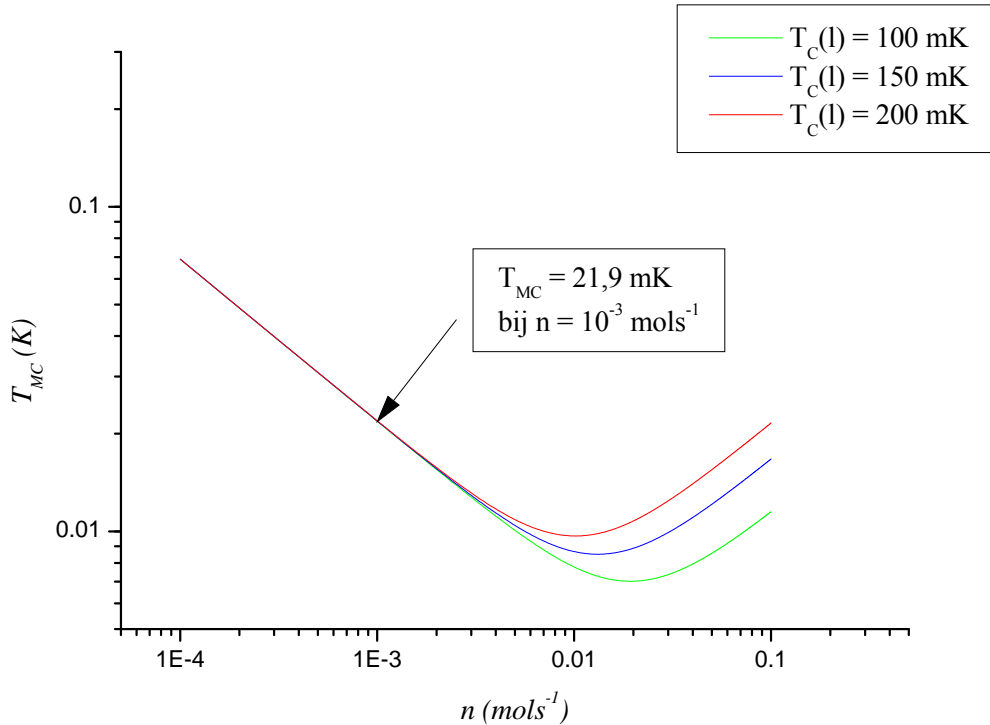
Het gemiddelde van de totale hoeveelheid sinter aan de wand in de gemengde en geconcentreerde fase bedraagt circa $200 m^2$. Allereerst heb ik de invloed van de inkomende temperatuur $T_c(l)$ bekeken. Als functie van de molaire stroom n heeft dit voor de temperatuur van de geconcentreerde fase bij binnenkomst in de mengkamer het volgende resultaat.



Figuur 4.1: temperatuur van de gemengde fase bij binnenkomst in de mengkamer als functie van de molaire stroom, voor verschillende temperaturen aan het begin van de gesinterde warmtewisselaars.

Helium werd met een snelheid $n = 962 \mu mols^{-1}$ rondgepompt. Het warmtelek naar de mengkamer bleek $\sim 45 \mu W$ te bedragen. Het blijkt dat bij deze waarden het programma in overeenstemming is met de metingen. De mengkamer had in de praktijk een temperatuur $T_{MC} = 21,8 mK$. Bij een stroomsnelheid $n = 10^{-3} mols^{-1}$ bepaalt het programma de

mengkamertemperatuur op 21,9 mK.



Figuur 4.2: temperatuur van de mengkamer als functie van de molaire stroom, voor verschillende temperaturen aan het begin van de gesinterde warmtewisselaars.

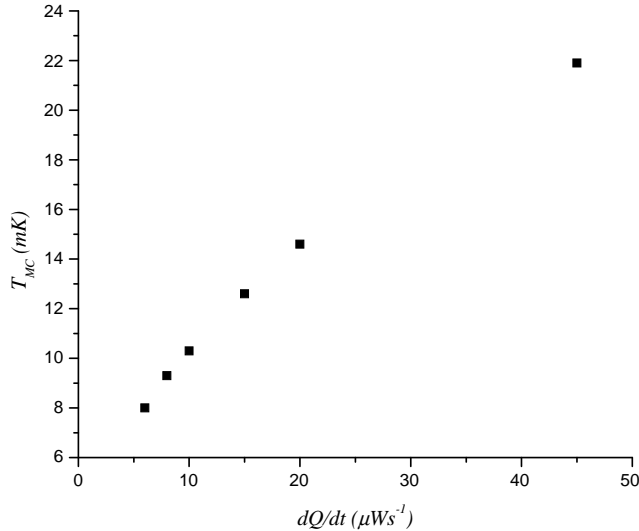
Voor pompsnelheden in de orde van 10^{-3} mols⁻¹ is de invloed van de inkomende temperatuur $T_c(l)$ verwaarloosbaar. In Frossati's eigen versie is dit impliciet terug te vinden in de verwaarlozing van $T_c(l)$ in formule (4.6).

Bij volgende koeling van MiniGRAIL zal de bol voor langere tijd op 20 K worden gehouden. Het waterstof dat zich in de bol bevindt en nu voor een groot warmtelek zorgt bij millikelvin temperaturen, staat deze temperatuur sneller zijn energie af. Wanneer vervolgens de bol verder wordt afgekoeld zal wellicht het warmtelek kleiner dan $45 \mu W$ zijn. Hierdoor zal de bol een lagere temperatuur kunnen bereiken. Wanneer op deze manier het warmtelek teruggedrongen kan worden tot $\sim 20 \mu W$ zal in de mengkamer een temperatuur bereikt kunnen worden van zo'n 14,5 mK. Het vergroten van het sinteroppervlak heeft weinig effect. Dit is eenvoudig te begrijpen wanneer vergelijking (4.12) wordt omgeschreven tot

$$T_{MC}^2 \propto \left(\frac{Q}{n} + 12,5T_c^2(0) \right). \quad (4.13)$$

Een groot contactoppervlak genereert een lage $T_c(0)$, maar bij grote Q zal zelfs voor een

lage $T_C(0)$ de factor Q/n dominant zijn en het gedrag van T_{MC} bepalen. Om de mengkamertemperatuur uiteindelijk tot de voor MiniGRAIL gewenste temperatuur van 8 mK te laten komen, zal het warmtelek tot $\sim 6 \mu W$ worden teruggebracht.



Figuur 4.3: T_{MC} afhankelijk van het warmtelek Q bij $n \sim 10^{-3} \text{ mols}^{-1}$ en $\sigma \sim 200 - 300 \text{ m}^2$.

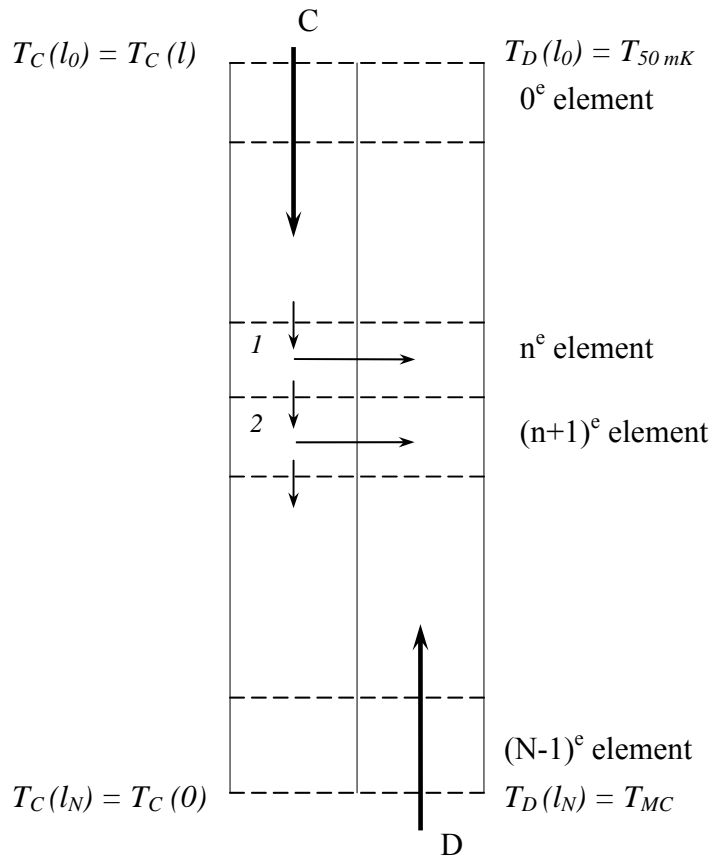
4.2 METHODE VAN LINEAIRE EN EXPONENTIËLE TEMPERATUURVERDELING

De natuurlijkste manier om het probleem van de warmteuitwisseling in een warmtewisselaar op te lossen, is om over de gehele lengte van een warmtewisselaar thermisch evenwicht te bepalen. De moeilijkheid bij het oplossen van dit probleem is echter dat ieder punt in de warmtewisselaar tegelijkertijd door zowel warmteoverdracht als viscositeit en warmtegeleiding wordt beïnvloed. Dit staat beschreven in paragraaf 4.3. Al komt het idee voor het model van lineaire verdeling voort uit het idee om thermisch evenwicht te bepalen, toch wil ik dit model eerst bespreken alvorens in paragraaf 4.3 tot de methode van thermisch evenwicht te komen.

Bij een afkoeling van een systeem wordt geregeld zowel de temperatuur van de mengkamer als die van de 50 mK-plaat gemeten. Met deze twee gegevens liggen de uiteinden van de gemengde fase in de warmtewisselaars vast. Een benadering voor het bepalen van thermisch evenwicht kan nu gemaakt worden door tussen deze uiteinden een bepaalde temperatuursverdeling op te leggen. Deze temperatuursverdeling in de gemengde fase beïnvloedt de geconcentreerde fase. De ontstane temperatuur aan het uiteinde van de geconcentreerde fase genereert een nieuwe mengkamertemperatuur. Tussen de nieuwe mengkamer-temperatuur en de bestaande temperatuur van de 50 mK-plaat kan een nieuwe lineaire verdeling worden opgelegd, waarna het proces zich herhaalt. Het systeem stabiliseert zich na een aantal ronden en de temperatuur van de mengkamer gaat naar een bepaalde waarde.

De warmtewisselaar heb ik opgedeeld in N elementen, waarbij $T_D(l_0) = T_{50mK}$ en

$T_D(l_N) = T_{MC}$. Voor de geconcentreerde fase geldt aan de uiteinden dat $T_C(l_0) = T_C(l)$ en $T_C(l_N) = T_C(0)$. Wat deze waarden exact zijn, hangt wat betreft $T_C(l)$ af van het gedrag van de continue warmtewisselaar en wat betreft $T_C(0)$, T_{50mK} en T_{MC} af van de eigenschappen van de gesinterde warmtewisselaars. De situatie is geschetst in figuur (4.3).



Figuur 4.4: warmtestromen loodrecht op de stroomrichting tussen de geconcentreerde en de gemengde fase door warmteoverdracht en parallel aan de stroomrichting door thermische geleiding en viscoze opwarming

De temperatuur $T_C(l)$ treedt op als parameter in het systeem. Vanuit dit element wordt naar beneden gewerkt. De elementen worden aangeduid met de index n , zodat $0 \leq n \leq N - 1$. Iedere $T_C(l_n)$ staat warmte af aan $T_D(l_n)$ en ontvangt warmte door wrijving aan de wand. Dit levert de temperatuur van het volgende element $T_C(l_{n+1})$, echter effecten van thermische geleiding zijn buiten beschouwing gelaten. Hiervoor kan gecorrigeerd worden door deze te berekenen tussen de elementen $T_C(l_n)$ en $T_C(l_{n+1})$ en de bijdrage op te tellen bij $T_C(l_{n+1})$. Zo komt de berekening uiteindelijk bij $T_C(l_N)$ uit. Deze temperatuur $T_C(l_N)$ genereert via vergelijking (1.8) een nieuwe T_{MC} , waarna het proces zich zoals gezegd herhaalt.

De vraag rijst wat voor temperatuursverdeling er over de gemengde fase gelegd kan worden. Het is niet direct duidelijk of het effect van verschillende verdelingen significant andere resultaten op zal leveren. Allereerst heb ik een lineaire verdeling toegepast. Voor een lineaire temperatuursverdeling tussen T_{MC} en T_{50mK} wordt $T_D(l_n)$ gegeven door

$$T_D(l_n) = T_{50mK} - \frac{n}{N}(T_{50mK} - T_{MC}) \quad (4.14)$$

Uit metingen blijkt dat het eindeloos toevoegen van extra stapwarmtewisselaars boven de mengkamer uiteindelijk niet tot een lagere mengkamertemperatuur leidt. In de eerste stapwarmtewisselaars die de geconcentreerde fase doorloopt vindt de grootste temperatuursverlaging plaats. Dit suggereert dat de temperatuursverdeling in de gemengde fase bovenin de warmtewisselaars rap afneemt en onderin langzaam. Ik heb daarom eveneens een exponentiële verdeling getest van de vorm

$$f(x) = Ae^{-Bx} \quad (4.15)$$

Met de randvoorwaarden $f(x=0) = T_D(l_0) = T_{50mK}$ en $f(x=L) = T_D(l_N) = T_{MC}$ vinden we

$$A = T_{50mK} \quad B = \frac{1}{L} \ln \frac{T_{50mK}}{T_{MC}} \quad (4.16)$$

Wetende dat $x = n \frac{L}{N}$ luidt de vergelijking voor $T_D(l_n)$

$$T_D(l_n) = T_{50mK} e^{-\frac{n}{N} \ln \frac{T_{50mK}}{T_{MC}}} \quad (4.17)$$

Er kan worden bepaald welke temperatuur de mengkamer bereikt met een specifieke serie gesinterde warmtewisselaars met vastliggende eigenschappen als contactoppervlak, lengte, doorsnede en stroomsnelheid. Daarentegen kunnen door deze eigenschappen te variëren ook de waarden worden geoptimaliseerd voor het bereiken van een zo laag mogelijke temperatuur in de mengkamer.

De invloed van de drie optredende effecten in de warmtewisselaar is gegeven als warmtetoevoer per tijdseenheid. De warmtetoevoer Q binnen een element is van de vorm

$$Q = Qdt \quad (4.18)$$

waarbij dt de tijd dat de vloeistof zich in een element bevindt. Nu wordt het volume V van één element gegeven door $V = AdL$ en het molair volume V_m door $V_m = \frac{V}{n_{el}}$, met A de doorsnede van de leiding, dL de lengte van een element en n_{el} het aantal mol per

element. Deze vergelijkingen combinerend vinden we voor de snelheid v

$$v = \frac{dL}{dt} = \frac{V_m n}{A}. \quad (4.19)$$

Voor het molair volume van de geconcentreerde fase, welke vrijwel gelijk aan dat van puur ${}^3\text{He}$ geldt dat $V_m = 36,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$. De lengte van een element dL wordt uiteraard gegeven door $dL = \frac{L}{N}$, waarbij L de lengte van de warmtewisselaar.

Vergelijking (4.18) is alleen te hanteren wanneer Q constant is over het interval dt . $T_C(l_n)$ moet in een tijd dt constant kunnen worden verondersteld. Dit impliceert dat de warmtecapaciteit C klein moet zijn ten opzichte van de toegevoegde warmte Qdt . De warmtecapaciteit wordt gegeven door $C = 25T_C n_{el}$ met n_{el} wederom het aantal mol in één element, $n_{el} = \frac{V}{V_m} = \frac{AdL}{V_m} = \frac{AL}{V_m N}$. T_C is in de orde van 10^{-2} K , A in de orde van $10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$. We zien dat $C \propto \frac{a}{N}$, met a in de orde van 1.

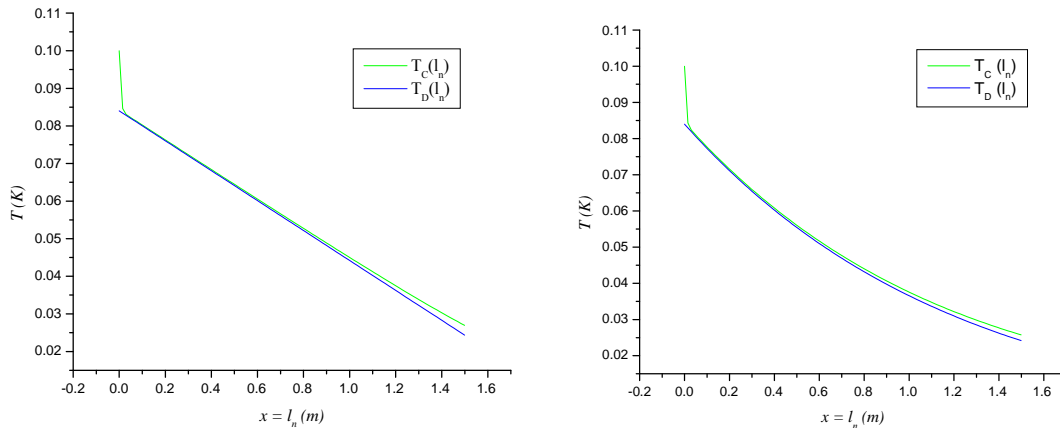
Voor de grootste warmtetoevoer in het systeem, de warmteoverdracht, vinden we $dQ = \lambda d\sigma (T_C^4 - T_D^4) dt$, met $dt = \frac{dL}{v} = \frac{L}{N} \frac{A}{V_m n}$ en voor het contactoppervlak $d\sigma = \frac{\sigma}{N}$. Er volgt dat $dQ \propto \frac{b}{N^2}$, met b eveneens in de orde van 1. Aangezien de warmte-effecten afkomstig van viscositeit en thermische geleiding sowieso klein zijn ten opzichte van de warmteoverdracht, is deze methode gerechtvaardigd voor grote N . Geregeld heb ik N in de orde van 10.000 gehanteerd.

Over de gemengde fase kan gezegd worden dat die minder sterk reageert op de geconcentreerde fase dan andersom. Vanwege minimalisering van viscositeit en warmtegeleiding is de doorsnede van de gemengde fase namelijk een factor 2 – 4 groter dan die van de geconcentreerde fase. Zodoende is n_{el} groter. Ook hebben we gezien dat $C = 107T_C n_{el}$ in plaats van $C = 25T_C n_{el}$. De warmtecapaciteit van één element is dus kleiner dan in de geconcentreerde fase.

Om de temperatuursverdeling van de geconcentreerde fase over de buis te kunnen volgen, heb ik alle temperaturen opgeslagen in een array. Het probleem hierbij was echter dat een array in Borland-C een maximaal aantal elementen kan bevatten, afhankelijk van het type variabele dat gebruikt wordt. Voor een array van double variabelen ligt het aantal elementen in de orde van 4.000. Een tijdrovende poging het het werkgeheugen dat gereserveerd wordt voor het array op te rekken met behulp van functies uit de libraries als `calloc` en `malloc` leidde niet tot het gewenste resultaat. Het aantal elementen bleef klein. Aangezien 2-dimensionale arrays worden behandeld als een in stukken geknipt 1-dimensionaal array, brengt ook dit geen resultaat. Het aan elkaar knopen van verschillende arrays is een optie die werkt, maar wel omslachtig is. Om uiteindelijk toch met een groot aantal elementen te kunnen werken, heb ik gekozen alle

eerder gedane berekeningen toch weg te gooien. Overigens kan, om toch het temperatuursverloop van de geconcentreerde fase te overzien, eventueel een selectie van de gedane berekeningen worden opgeslagen.

Wanneer de methode voor een lineair en exponentieel verband vergeleken worden met parameters zoals bij de laatste afkoeling van MiniGRAIL, leveren de programma's het volgende resultaat.



Figuur 4.5: Vergelijking tussen lineair en exponentieel verband met parameters zoals bij de laatste afkoeling van MiniGRAIL ($Q = 45 \mu W$, $T_{50mK} = 84mK$, $\sigma \sim 200 m^2$, $L \sim 1,5 m$, $A \sim 10 mm^2$).

Uiteindelijk uitkomsten zijn vrijwel gelijk, $T_C(l_N) = 26,96mK$ en $T_{MC} = 24,31mK$ voor de lineaire verdeling en $T_C(l_N) = 25,76mK$ en $T_{MC} = 24,14mK$ voor de exponentiële verdeling.

Opvallend is dat de uitkomsten niet wezenlijk verschillen, het effect van deze verschillende temperatuursverdelingen over de gemengde fase is zeer klein. $T_C(l)$ laat een erg grote afname zien in het eerste traject van de warmtewisselaar, grote temperatuursverschillen worden direct opgeheven. De berekende waarde voor de mengkamertemperatuur is wat hoog gezien de experimentele waarde van 21,8 mK.

Deze resultaten zijn verkregen met een parameter $T_C(l_0) = 100 mK$. Het blijkt dat deze parameter van verwaarloosbare invloed is, voor $T_C(l_0) \sim 100 - 200 mK$ worden dezelfde uitkomsten gegenereerd.

In iedere ronde wordt de mengkamertemperatuur aangepast, totdat deze stabiliseert. Alleen de temperatuur van de 50 mK-plaat blijft iedere ronde gelijk. Het is dus belangrijk de invloed van deze waarde te bekijken, zeker gezien het feit dat dit een vrij onnatuurlijke parameter is om je systeem in uit te drukken. De invloed blijkt echter klein te zijn, in de orde van 0,1 mK voor $T_{50mK} \sim 40 - 100 mK$. Dit geeft aan dat de methode weinig afhankelijk is van een dergelijke parameter.

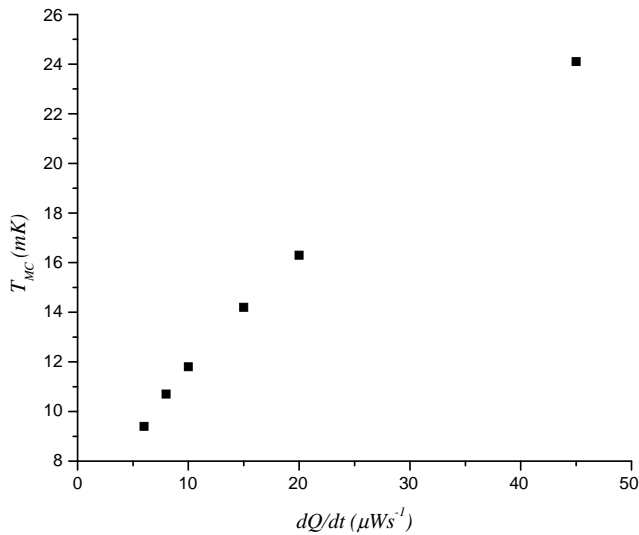
Het gedrag van de warmtewisselaar wordt dus overwegend bepaald door de interne parameters Q , n , σ , L en A .

Een probleem van het programma doet zich op bij grote aantallen elementen. Dit probleem wordt veroorzaakt door de berekening van dQ_{cond} tussen twee elementen. Dit blijkt uit het feit dat wanneer de thermische geleiding niet meegenomen wordt, de

uitkomst onafhankelijk is van N . Wanneer thermische geleiding wel wordt meegenomen, wordt het programma instabiel bij groter wordende N en genereert het mengkamer-temperaturen die te hoog zijn.

Bij de berekening van dQ_{cond} tussen $T_C(l_n)$ en $T_C(l_{n+1})$ treedt een fout op, wat een temperatuur $T_C(l_{n+1})$ oplevert die licht afwijkt van de juiste waarde. Deze waarde wordt vervolgens weer gebruikt om het volgende element te bepalen. Zo wordt de fout bij ieder element groter. Wanneer N nu groot wordt genomen, wordt de invloed van de doorberekende fout groter. Het één en ander is te zien in figuur 4.7.

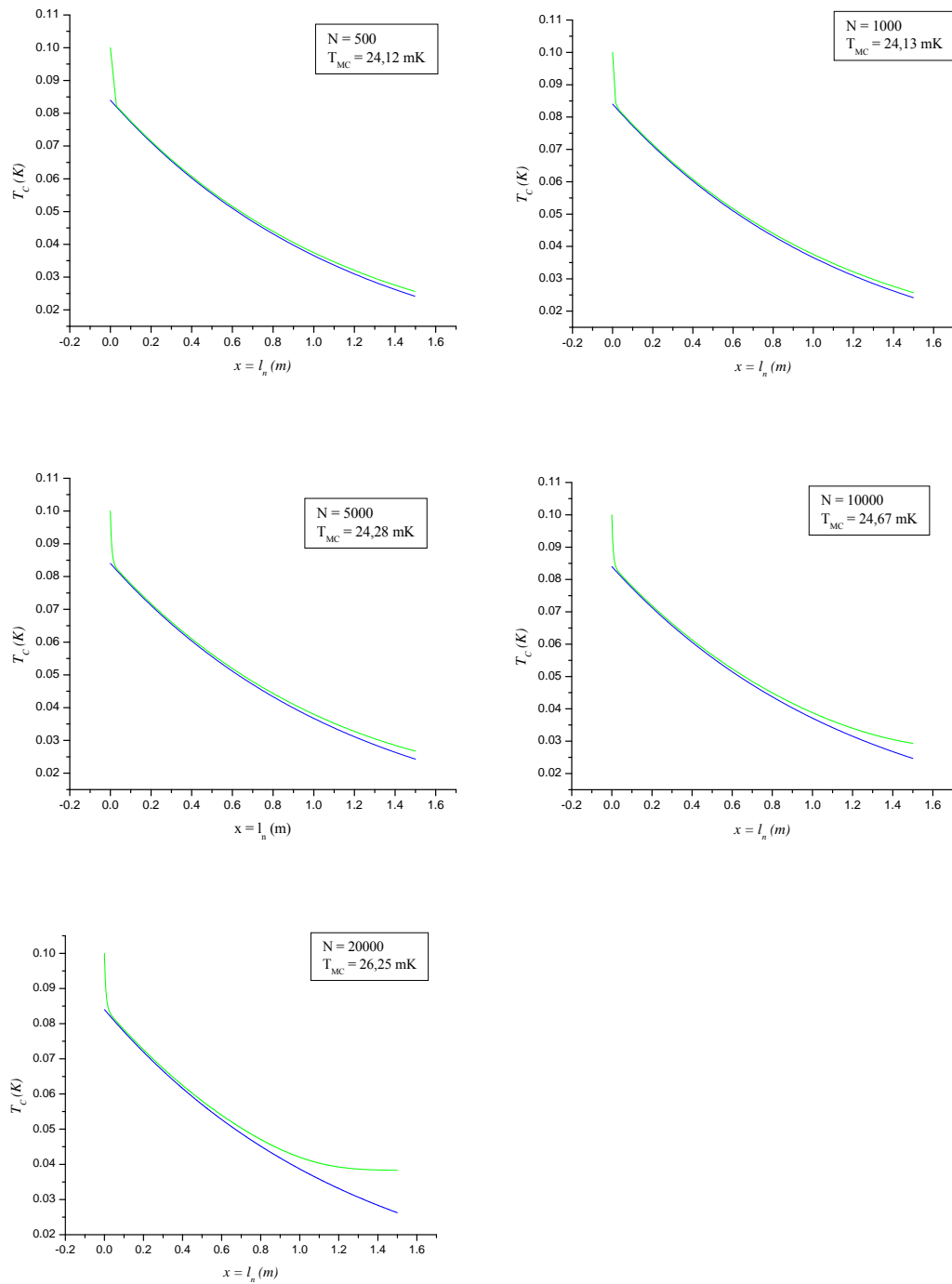
Om de voor MiniGRAIL gewenste mengkamertemperatuur te verkrijgen van ~ 8 mK kan bij redelijke parameters T_{MC} als functie van Q bepaald worden.



Figuur 4.6: T_{MC} afhankelijk van het warmtelek Q bij $n \sim 10^{-3}$ mols $^{-1}$, $A \sim 10$ mm 2 , $\sigma \sim 300$ m 2 , $L \sim 2$ m (dit is met een extra stapwarmtewisselaar). Hierbij is geen rekening gehouden met de verschillende diameters van de afzonderlijke stappen.

Opmerkelijk is dat bij deze methode het toevoegen van extra sinteroppervlak weliswaar een beperkt, maar zeker significant verschil oplevert. Deze methode geeft wat hogere temperaturen dan de methode uit paragraaf 4.1.

Geconcludeerd moet worden dat hoe dan ook het warmtelek naar de mengkamer in de opstelling van MiniGRAIL flink teruggedrongen moet worden om een temperatuur van ~ 8 mK te bereiken.



Figuur 4.7: Uitkomst van de de exponentiële temperatuursverdeling. Voor grote N gaat de berekening fout.

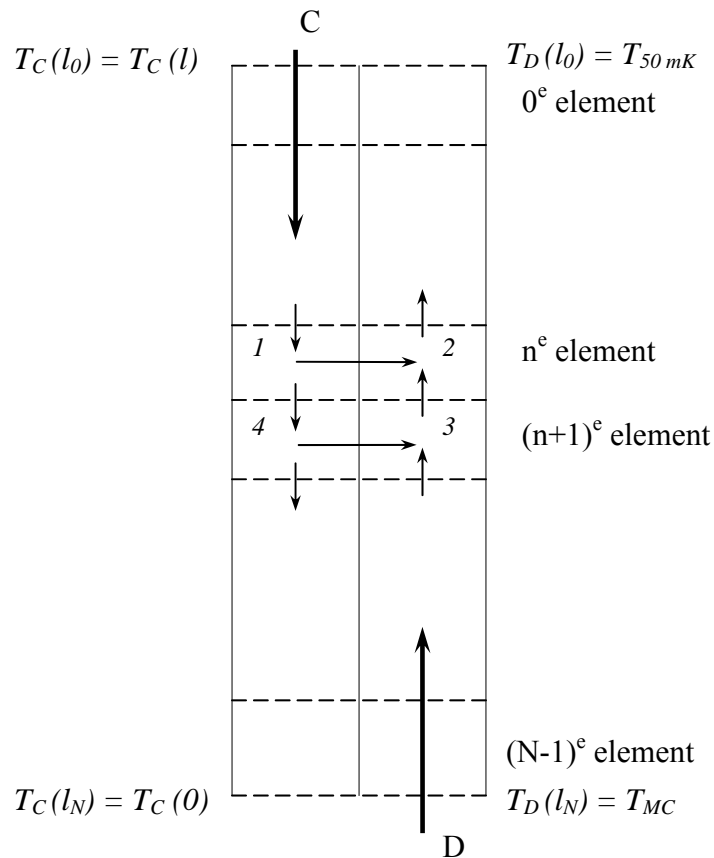
4.3 METHODE VAN RELAXATIE TOT THERMISCH EVENWICHT

Tot dusver waren de modellen gebaseerd op kunstmatige aannames. In paragraaf 4.1 werden de warmtewisselaars als perfect beschouwd, zodat viscositeit en thermische geleiding als een storing op de warmteoverdracht beschouwd kunnen worden. In paragraaf 4.2 werd één de fases kunstmatig een lineaire temperatuursverdeling opgelegd en werd de invloed daarvan op de andere fase berekend. Mathematisch gezien zou een berekening zonder dergelijke aannames de voorkeur genieten. Een systeem waarbij warmteoverdracht, viscositeit en warmtegeleiding tegelijkertijd bepaald worden, biedt een realistischer voorstelling van het koelproces. Het mooiste zou zijn wanneer met de stroomsnelheid als parameter thermisch evenwicht aan beide zijden in de warmtewisselaar bepaald kan worden. Dat wil zeggen, de temperatuur op iedere positie in de twee buizen is bekend en constant in de tijd. De hoeveelheid sinter, de diameter van de leidingen voor beide fases en de lengte van de warmtewisselaars kunnen dan geoptimaliseerd worden en aangepast worden aan de gewenste temperatuur van de mengkamer.

Hiertoe kan de warmtewisselaar wederom over de lengte in N elementen worden opgedeeld. Er geldt voor de geconcentreerde fase dat $T_C(l_0) = T_C(l)$ en $T_C(l_N) = T_C(0)$. Voor de gemengde fase kunnen de randvoorwaarden worden opgelegd dat $T_D(l_0) = T_{50mK}$ en $T_D(l_N) = T_{MC}$. $T_C(l)$ is een parameter van het systeem die bepaald wordt door externe factoren. Deze parameter is zoals we eerder gezien hebben van kleine invloed. De eigenschappen van de gesinterde warmtewisselaars bepalen $T_C(0)$, T_{50mK} en T_{MC} .

Warmteoverdracht kan nu beschreven worden als warmtestromen tussen de elementen $T_C(l_n)$ en $T_D(l_n)$, waarbij $0 \leq n \leq N-1$. Warmtestromen veroorzaakt door thermische geleiding en viscoze stroming treden op tussen de elementen $T_{C/D}(l_n)$ en $T_{C/D}(l_{n+1})$. Eén en ander is weergegeven in figuur 4.8.

Stel nu dat we bij het n^e element zijn aanbeland en met behulp van $T_C(l_n)$ (in figuur 4.8 aangeduid met (1)) $T_C(l_{n+1})$ (4) moeten bereken. Tussen (1) en (2) vindt warmteoverdracht plaats. Vanwege een warmtetoevoer vanuit (3) hangt (2) van (3) af, welke vervolgens weer wordt beïnvloed door (4). Kortom, de temperatuur in (1) hangt af van de temperatuur in (4). De conclusie is dat (4) niet direct berekend kan worden vanuit (1), aangezien (4) al bekend moet zijn om (1) in eerste instantie te kunnen bepalen. Fysisch gezien ligt deze afhankelijkheid over de gehele warmtewisselaar natuurlijk in de lijn der verwachting, de numerieke oplossing hiervan is niet triviaal. De oplossing van dit probleem is, mede ook door tijdgebrek, helaas niet gelukt, wel wil ik de te volgen oplossingsmethode bespreken en verdere suggesties doen.



Figuur 4.8: warmtestromen loodrecht op de stroomrichting tussen de geconcentreerde en de gemengde fase door warmteoverdracht, en parallel aan de stroomrichting door thermische geleiding en viscoze opwarming

Het idee achter de oplossing via deze methode is als volgt. Alle elementen $T_{C/D}(l_n)$ moeten anders dan bij de methode uit paragraaf 4.2 nu wel degelijk opgeslagen worden in arrays, aangezien de temperatuur in alle elementen aangeroepen moet kunnen blijven worden om nieuwe temperaturen te bepalen. De geconcentreerde en gemengde fase wordt beide een zekere temperatuursverdeling opgelegd. In principe maakt de vorm van deze verdeling niet uit, verstandig is om een verdeling tussen temperaturen te nemen die in de lijn der verwachting ligt voor het uiteindelijke thermisch evenwicht. Hiervoor zijn twee redenen. Ten eerste zou het kunnen zijn dat een onwaarschijnlijke initiële verdeling leidt tot een thermisch evenwicht dat niet fysisch is. Ten tweede is het zaak het aantal rondes dat nodig is om tot thermisch evenwicht te komen zo klein mogelijk te houden. Dit verkleint namelijk het aantal berekeningen dat nodig is om tot het resultaat te komen aanzienlijk, en daarmee blijft ook de fout beter binnen de perken. Dit is van cruciaal belang om tot redelijke resultaten te komen. Initiële verdelingen kunnen worden gedaan door bijvoorbeeld een lineaire dan wel exponentiële verdeling op te leggen tussen aannemelijk temperaturen aan de vier uiteinden van de leidingen. Eventueel kan een

verdeling gemaakt worden door, uitgaande van $T_C(l_0)$ in de ene en T_{MC} in de ander fase, de viscoze stroming en de daar uit voortvloeiende $T_{C/D}(l_n)$ te bepalen. Deze laatste methode zal echter naar alle waarschijnlijkheid een verdeling opleveren die verder af ligt van het uiteindelijke evenwicht dan de eerste methode en is daarom minder geschikt.

De elementen $T_C(l_n)$ en $T_D(l_n)$ wisselen warmte uit. Eveneens ontvangen zij een hoeveelheid warmte van de warmere burens, respectievelijk $T_C(l_{n-1})$ en $T_D(l_{n+1})$. Dit levert nieuwe temperaturen $T'_C(l_n)$ en $T'_D(l_n)$ op. Vervolgens wordt de berekening herhaald voor $T_C(l_{n+1})$ en $T_D(l_{n+1})$. Wanneer alle elementen bepaald zijn, levert $T_C(l_N)$ een nieuwe mengkamertemperatuur. Vervolgens worden de elementen van de arrays $T_C(l_n)$ en $T'_C(l_n)$ evenals van $T_D(l_n)$ en $T'_D(l_n)$ vergeleken. Zolang de verschillen groot zijn, en dus ook T_{MC} en T'_{MC} veel verschillen, moet het proces herhaald worden. Hiervoor worden de elementen $T'_C(l_n)$ vanwege de stroming gekopieerd naar $T_C(l_{n+1})$, en de elementen $T'_D(l_n)$ naar $T_D(l_{n+1})$. De beginwaarden die vrijkomen worden gegeven door $T_C(l_0) = T_C(l)$ en $T_D(l_N) = T'_{MC}$.

De doorsnede van de leidingen op plaatse $x = l_n$ kan geoptimaliseerd worden door de opwarming door viscositeit en thermische geleiding te minimaliseren. Zo ontstaat een verloop $A = A(l_n)$. Er moet echter mee rekening gehouden worden dat daardoor het aantal mol per element n_{el} veranderd en dus ook dt . Dit heeft direct consequenties voor de toegevoegde warmte ΔQ_{exch} . Er kan zo een verloop $A = A(l_n)$ gevonden worden.

Het contactoppervak σ per lengte-eenheid van de warmtewisselaar speelt de rol van een parameter, evenals de lengte L en de stroomsnelheid n . Door met behulp van loops het proces voor verschillende waarden van L en n uit te rekenen, kan het systeem geoptimaliseerd worden.

Een benadering die bij deze methode gedaan is, treedt op bij het kopiëren van de elementen $T'_C(l_n)$ naar $T_C(l_{n+1})$, en de elementen $T'_D(l_n)$ naar $T_D(l_{n+1})$. Eerst staat $T_C(l_n)$ in contact met $T_D(l_n)$, in de volgende ronde staat de oude $T_C(l_{n+1})$ in contact met de oude $T_D(l_{n+1})$. Dit is in werkelijkheid alleen het geval wanneer de vloeistof in beide elementen een lengte dL heeft afgelegd, dat wil dus zeggen dat de snelheid gelijk is in beide fases. Herinner dat

$$v = \frac{V_m n}{A}.$$

De molaire stroom n is voor beide fases uiteraard gelijk en $V_m(^3\text{He}) \approx V_m(^3\text{He} - ^4\text{He})$. Echter, voor de doorsnede geldt gebruikelijk $A_D > A_C$. Als dat het geval is, worden na een aantal ronden elementen met elkaar in contact gesteld die dat in werkelijkheid niet zijn. Over de grootte van de invloed van deze benadering zijn moeilijk uitspraken te doen.

5. BENADERINGEN, NAUWKEURIGHEID EN SUGGESTIES

In de uitgewerkte oplossingsmethoden treden grote en kleine fouten en benaderingen op. Een overzicht.

Voor de impedantie in viscoze opwarming is een uitdrukking gebruikt die geldig is voor vierkante leidingen (vergelijking (2.4)). De doorsnede van de leiding van de geconcentreerde fase heeft echter de vorm van een trapezium, de gemengde fase is vrijwel circulair. De invloed van deze benadering zal erg klein zijn.

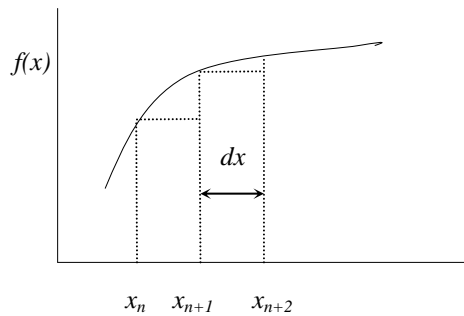
In de methodes van paragraaf 4.2 en 4.3 wordt aangenomen dat de temperatuur in één element gelijk is. Dit is enkel het geval wanneer er een goede warmtegeleiding stroom in de radiële richting plaats vindt. Wanneer het Reynoldsgetal gegeven door

$$\text{Re} = \frac{\rho v_0 d}{\eta}, \quad (5.1)$$

met ρ de dichtheid, v_0 de stroomsnelheid en d een (effectieve) diameter, wordt uitgerekend, blijkt volgens de classificering $\text{Re} < 2000$ dat de stroom zich laminair gedraagt. Dit betekent in principe dat warmte zich matig in de radiële richting verplaats. Voor een kleine doorsnede zal de menging loodrecht op de stroomrichting beter zijn.

In de gemengde fase neemt het percentage ^3He af in de richting van de 50 mK-plaat. Dit valt te wijten aan het gedrag van ^3He in superfluïde ^4He , waar het zich gedraagt als een gas. Het percentage neemt af van $\sim 6,5\%$ in de mengkamer tot $\sim 1\%$ in de still. Door deze veranderende verhouding zullen ook grootheden als het molaire volume V_m en de warmtecapaciteit C variëren. Aangezien het percentage tussen mengkamer en 50 mK-plaat slechts licht zal veranderen, zullen de effecten zeer klein zijn.

Een programmeertechnische benadering wordt gedaan bij het vervangen van een integraal door een sommatie. Wanneer een de integraal van een steile functie wordt benaderd door een een sommatie $\sum f(x_n)dx$, wordt in iedere term een fout gemaakt. In het probleem van de warmtewisselaars neemt de temperatuur heel geleidelijk af tussen opeenvolgende elementen. De fout zal dus ook klein zijn. Om de fout te marginaliseren zijn er diverse technieken ontwikkeld die eenvoudig ingebouwd kunnen worden. Dit zal in het geval van de warmtewisselaars de uitkomst niet veel veranderen en alleen bijdragen aan de nauwkeurigheid.



Figuur 5.1: Door integratie te vervangen door de sommatie $\sum f(x_n)dx$, treedt, met name bij steile functies, een fout op.

In de methode van een lineaire dan wel exponentiële temperatuursverdeling evenals in de methode van thermisch evenwicht wordt een grote fout gemaakt door door te rekenen met eerder bepaalde uitkomsten die reeds een fout bevatten. Dit is eerder opgemerkt in het commentaar op de thermische geleiding. Eerder gemaakte fouten werken op die manier door in later gedane berekeningen. Een belangrijk onderdeel van de verdere ontwikkeling zal zijn om een oplossing te vinden voor dit probleem.

De grootte van de invloed van oplegging van een kunstmatige temperatuursverdeling over de gemengde fase in de methode van paragraaf 4.2 is moeilijk te schatten. Wanneer het de geconcentreerde fase snel reageert op temperatuursveranderingen in de gemengde fase, wat gebeurt bij goede warmte-overdracht en dus bij een groot contactoppervlak, is het type verdeling van weinig belang. Feit is wel dat deze methode enkel informatie levert over de geconcentreerde fase. De methode van relaxatie tot thermisch evenwicht over de gehele warmtewisselaar is dus zeer gewenst.

Bij de methode van thermisch evenwicht treedt zoals eerder vermeld in paragraaf 4.3 het probleem op dat na een aantal ronden die moeten leiden tot stabilisatie van de temperatuur elementen met elkaar in contact worden gesteld die dat in wezen niet zijn. Hiervoor moet een oplossing gevonden worden.

Verder moet nagedacht worden over de precieze aanpak van het optimaliseren van de doorsnede $A = A(l_n)$.

REFERENTIES

- [1] Matter and Methods at Low Temperatures
F. Pobell
- [2] Cryocoolers part 2: Applications
G. Walker
- [3] An introduction to Millikelvin Technology
D. Betts
- [4] An Experimental Setup for the Study of Polarized ^3He and Dilute $^3\text{He} - ^4\text{He}$ Mixtures
G. Vermeulen
- [5] MiniGRAIL, the first sperical gravitational wave antenna
A. de Waard
- [6] Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing
W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky, W. Vetterling
- [7] Computational Physics part 1 & 2
E. Hennes

BIJLAGE

Programma behorend bij: paragraaf 4.1 Methode van Frossati

```
/*
programma om de temperatuur bij binnenkomst van de mengkamer te
bepalen, bij gegeven oppervlak sigma, als functie
van de binnenkomende temperatuur Tc (l) en de deeltjes-
stroom np. Viscositeit en thermische geleiding zijn buiten
beschouwing gelaten. In deze versie lopen de variabelen Tc1
en np LINEAIR op!!
*/

#include <math.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <gplot.h>
#define Array_size 1000

double Tc0 (double X, double Y, double A);
double Tmc (double Tc0, double Qp, double np);
main ()
{
    double sigma = 200.; // oppervlakte gesinterde leiding.
    double labda = 1.;
    double a = 25.; // cc = aT
    double b = 107.; // cd = bT
    double A = 2.*(sigma*labda*(1. - (a/b)*(a/b)))/a; // constante
    double Qp = 20e-6; // warmtelek

    double Tc1; // variabelen
    int i;
    int index;
    float np_array [Array_size];
    float AA [Array_size];

    float Matrix1 [Array_size]; //Tc(0) als functie van np en Tc1
    float Matrix2 [Array_size];
    float Matrix3 [Array_size];

    for (index=0; index<Array_size; index++)
    {
        np_array [index] = 1.e-4 + (double)index*1.e-4;
        // printf ("\n%e", np_array[index]);
    }
}
```

```

Tc1 = 50e-3;
for (i=0; i<3; i++)
{
    Tc1 = Tc1 + 50e-3;
    index=0;
    for (index=0; index<Array_size; index++)
    {
        AA [index] = Tc0 (Tc1,np_array[index],A);
    } //for

    if (i==0)
    {
        for (index=0; index<Array_size; index++)
        {
            Matrix1 [index] = AA [index];
        }
        gpl_data (Array_size, np_array, Matrix1,"Tc(1) = 100 mK");
    }
    else if (i==1)
    {
        for (index=0; index<Array_size; index++)
        {
            Matrix2 [index] = AA [index];
        }
        gpl_data (Array_size, np_array, Matrix2,"Tc(1) = 150 mK");
    }
    else
    {
        for (index=0; index<Array_size; index++)
        {
            Matrix3 [index] = AA [index];
//      printf ("\n%e %e",Matrix3[index],AA[index]);
        }
        gpl_data (Array_size, np_array, Matrix3,"Tc(1) = 200 mK");
    }
} //for

gpl_end ();
gpl_show();
for (index=0; index<Array_size; index++)
    Matrix1 [index] = Tmc (Matrix1 [index], Qp, np_array[index]);
gpl_data (Array_size, np_array, Matrix1,"Tc(1) = 100 mK");
for (index=0; index<Array_size; index++)
    Matrix2 [index] = Tmc (Matrix2 [index], Qp, np_array[index]);
gpl_data (Array_size, np_array, Matrix2,"Tc(1) = 150 mK");

```

```

for (index=0; index<Array_size; index++)
    Matrix3 [index] = Tmc (Matrix3 [index], Qp, np_array[index]);
gpl_data (Array_size, np_array, Matrix3,"Tc(1) = 200 mK");
gpl_show ();
return 0;
} //main

double Tc0 (double X,double Y,double A)
{
    float hulp;
    hulp = 1./(X*X);
    hulp = (A + hulp)/Y;
    hulp = 1./sqrt(hulp);
    return hulp;
} //Tc0

double Tmc (double Tc0, double Qp, double np)
{
    float hulp;
    hulp = (Qp/np)+12.5*Tc0*Tc0;
    hulp = sqrt (hulp/94.5);
    return hulp;
} // Tmc

```


Programma behorend bij: paragraaf 4.2 Methode van lineaire en exponentiële temperatuursverdeling

```
/*  
LINEAIR VERBAND  
Berekening aan 1 warmtewisselaar, waarbij de D-stroom kunstmatig  
lineair is opgedeeld tussen Tmc en T50mK. Dit is dus slechts een model.  
Vooralsnog is geleiding niet meegenomen, viscositeit eventueel.  
  
11 februari: De verandering van Tmc door de inkomende temperatuur van de  
C-stroom is meegenomen door een while-loop te maken die door gaat tot  
2 opeenvolgende Tmc's (Tmc en Tmccopy) tot op een in te stellen waarde  
aan elkaar gelijk zijn.  
*/  
  
#include <stdio.h>  
#include <stdlib.h>  
#include <math.h>  
#include <gplot.h>  
#define N 1001 // totaal aantal stukjes dL  
  
main ()  
{  
    double Td, Tc, Tcoud, Tmccopy;  
    float array_Td [1+(N-1)/10];  
    float array_Tc [1+(N-1)/10];  
    float array_x [1+(N-1)/10];  
    int i,j;  
  
    //eigenschappen HE  
    double labda = 1.;  
    double L = 1.5;  
    double Ac = 10e-6;  
    double n_per_el;  
    double sigma = 200;  
  
    // eigenschappen C- en D-stroom  
    double vmc = 36.38e-6; // molair volume C  
    double n3p = 962e-6;  
    double v; // snelheid van de C-stroom  
    double dt;  
  
    // beginwaarden temperaturen (verankering)  
    double dqexch; // warmteoverdracht C- en D-stroom  
    double Tmc = 10e-3;
```

```

double T50mK = 84e-3;
double Tc0 = 100e-3;
double Qextp = 45e-6; // warmtelek mengkamer

// viscositeit
double dQvisc;
double eta_c = 1.8e-7;
double dz = 12*L/(N*(Ac*Ac)); // benadering impedantie voor rechthoekig
// kanaal dz=12*dL/(a*b^3)
double Cvisc = eta_c*Vmc*Vmc*n3p*n3p*dz; // constante

// geleiding
double dQcond;
double k = 3.3e-4;

// tijd dt is geoptim. door de gem. snelheid van de C- en D-stroom te nemen
v = Vmc*n3p/Ac;
dt = L/(N*v); // dt=dL/v
n_per_el = Ac*L/(N*Vmc); // aantal mol per element = Ac*dL/Vmc

// warmte berekening aan C-stroom
Tmccopy = 1.;
j=1;
while (Tmc/Tmccopy >1.0001 || Tmccopy/Tmc >1.0001)
{
Tmccopy = Tmc;
Tc = Tc0;
Td = T50mK;
i=0;

array_Td [i/10] = T50mK;
array_Tc [i/10] = Tc;
array_x [i/10] = i*L/N;

printf ("\n Td[%d] = %f ", i, 1000*Td);
printf (" Tc[%d] = %f", i, 1000*Tc);
for (i=1; i<=N-1; i++)
{
Tcoud = Tc;
Td = Td - (T50mK-Tmc)/(N-1);
dQexch = lambda*(sigma/N)*( pow1(Tc,4.) - pow1(Td,4.) ) * dt;
dQvisc = ( Cvisc / (Tc*Tc) ) * dt;
Tc = Tc + (dQvisc - dQexch)/(25*Tc*n_per_el); // T'=T-dQ/C
dQcond = -Ac*(k/Tc)*((Tc-Tcoud)/(L/N))*dt; // dQcond=-Ak(T)(dT/dx)dt
Tc = Tc + dQcond/(25*Tc*n_per_el); // T'=T-dQ/C
if (i%1000==0)

```

```

    {
        printf ("\n Td[%d] = %f ", i, 1000*Td);
        printf (" Tc[%d] = %f dQcond = %e", i, 1000*Tc, -dQcond);
    }
    if (i%10==0)
    {
        array_Td [i/10] = T50mK - i*(T50mK - Tmc)/N;
        array_Tc [i/10] = Tc;
        array_x [i/10] = i*L/N;
    }
} //for

Tmc = sqrt ( (Qextp/n3p + 12.5*Tc*Tc)/94.5 );
printf ("\n Tmc = %f mK Tmccopy = %f ", 1000*Tmc, 1000*Tmccopy);
printf (" j = %d", j);
j++;
} //while

gpl_data (1+(N-1)/10, array_x, array_Tc,"Td");
gpl_data (1+(N-1)/10, array_x, array_Td,"Tc");
gpl_show();

printf ("\n dQexch = %e J dQvisc = %e J", dQexch, dQvisc);
printf (" dQcond = %e", dQcond);
printf ("\n Tmc = %f Tc = %f", 1000*Tmc, 1000*Tc);

return 0;
} // main

```